Μάθημα : 7º

13/12/2019

Θεωρία Γραφημάτων

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Πρόβλημα χρωματισμού: Μας ενδιαφέρει να ορίσουμε ένα γράφημα G και να κάναμε διαμέριση σε G σύνολα με πλήθος κορυφών V(G).

Σε κάθε διαμέριση, ανήκει μια κατηγορία κορυφών.

Στην ουσία, χωρίζουμε σε χρωματικές κλάσεις.

Το c λέγεται χρωματικός αριθμός.

Άρα, οι κορυφές έχουν c μεταξύ τους διαφορετικά χρώματα.

- Δεν μπορούν δυο κορυφές που ενώνονται με μια ακμή να έχουν το ίδιο χρώμα. !

Ορισμός (κ- χρωματισμός)

Έστω γράφημα G.

Η συνάρτηση $X: V(G) \to [1,2,3,\ldots,k]$, ονομάζεται κ-χρωματισμός του γραφήματος αν για κάθε ακμή $e=(u,v) \in E(G)$ ισχύει $X(u) \neq X(v)$.

Ορισμός (Χρωματικές κλάσεις)

Έστω ένα γράφημα G και έστω X ένας κ-χρωματισμός.

Τα σύνολα $X^{-1}(1), X^{-1}(2), \ldots, X^{-1}(k)$, ονομάζονται χρωματικές κλάσεις.

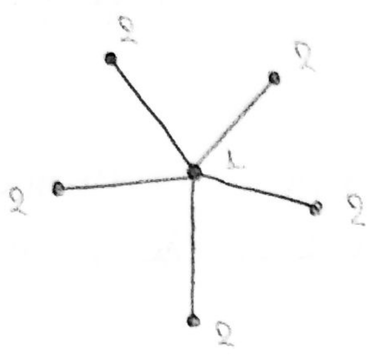
Ορισμός (χρωματικός αριθμός)

Έστω ένα γράφημα G.

Ο χρωματικός αριθμός $X(G)$ του γραφήματος G είναι ο μικρότερος ακέραιος κ, για τον οποίο ισχύει ότι το G είναι κ-χρωματίσιμο.

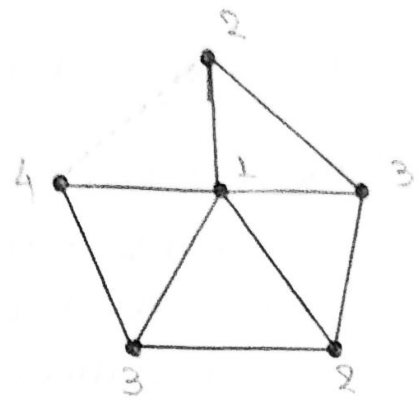
Άσκηση: Να βρεθούν τα $\chi(\kappa)$

G_1:



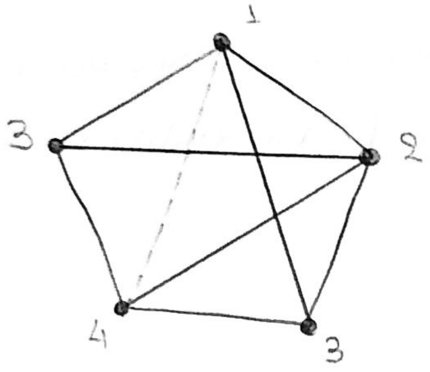
$\chi(G_1) = 2$

G_2:



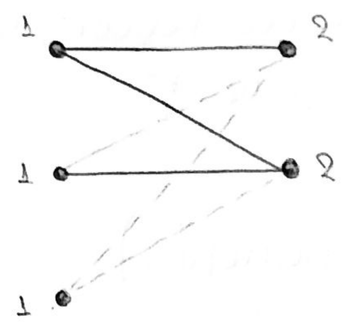
$\chi(G_2) = 4$

G_3:



$\chi(G_3) = 4$

G_4:



$\chi(G_4) = 2$ //

Θεώρημα: Έστω G ένα απλό γράφημα και έστω u και v δυο μη γειτονικοί κόμβοι του G.
Ο αλγόριθμος Sequintiol-Coloring χρωματίζει ένα γράφημα G τάξης n.

→ Εαν $G_1 = G + (u,v)$ και $G_2 = G/(u,v)$
τότε ισχύει $\boxed{P(G,k) = P(G_1,k) + P(G_2,k)}$

Ορισμός: (Χρωματικά πολυώνυμα)

Χρωματικό πολυώνυμο ή χρωματική συνάρτηση του γραφήματος G, συμβολίζεται $P(G,k)$ και δίνει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν οι κόμβοι ενός γραφήματος με κ-χρώματα.

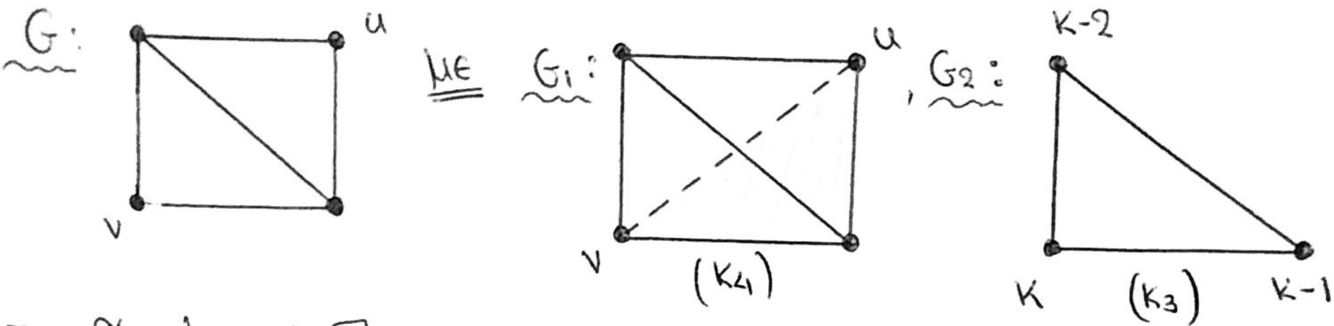
Π.χ.

Έχω κ-χρώματα και 3 κορυφές

- Η μεσαία, πόσα χρώματα μπορεί να πάρει: → κ-χρώματα
- Η πρώτη (κ-1)-χρώματα και η τελευταία (κ-1)-χρώματα.

$$P(G,k) = k(k-1)^2 \quad , \quad \chi(G)=2$$

Αν G είναι το ακόλουθο γράφημα



Τότε το Χρωματικό Πολυώνυμο ενός πλήρους γραφήματος δίνεται από τον τύπο: $\boxed{P(K_n,k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)}$

Π.χ. $P(G,k) = P(K_4,k) + 3P(K_3,k) =$

$= k(k-1)(k-2)(k-3) + 3k(k-1)(k-2)$

Για αυτό το παράδειγμα το χρωματικό πολυώνυμο είναι:

$$P(G,k) = P(K_4,k) + P(K_3,k) =$$
$$= k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) =$$
$$= k(k-1)(k-2)\cdot[(k-3)+1] =$$
$$= k(k-1)(k-2)\cdot(k-2) =$$
$$= k(k-1)(k-2)^2$$

→ Ο μικρότερος ακέραιος κ που ισχύει αυτή η σχέση είναι το 3.

→ για κ=3 έχω $3\cdot(3-1)(3-2)^2 = 6$

Άρα, με 6 διαφορετικούς τρόπους μπορεί να χρωματιστεί.